Е.В.Силаев

# О Р-СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМАХ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $E_n$.

В работе рассматриваются р-сопряженные системы, лежащие на гиперсфере в евклидовом пространстве. Такие поверхности не могут быть минимальными как поверхности в $E_n$. Их присоединенные поверхности распадаются.

I. Пусть поверхность $V_p$ принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(0,r)$ с центром в точке $O$ и радиусом $r$ евклидова пространства $E_n$. Присоединим к поверхности $V_p$ подвижной репер

$$R=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}\quad (i,j=1,\dots,p;\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n\}$$

так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве $T_x$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_x$ к пространству $T_x$ в точке $x$. Так как $\forall x\in V_p$ $\vec{x}^2=r^2$, где $\vec{x}=\vec{Ox}$, то $\vec{x}\cdot d\vec{x}=0$. Следовательно, $\vec{x}\perp T_x$, поэтому $\vec{x}=x^\alpha\vec{e}_\alpha$, где $\sum\limits_\alpha (x^\alpha)^2=r^2$. Деривационные формулы репера $R$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
d\vec{x} &= \omega^i\vec{e}_i,\\
d\vec{e}_i &= \omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha, \qquad (1)\\
d\vec{e}_\alpha &= \omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta .
\end{aligned}
$$

Так как $\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ -символ Кронекера, то $\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0$. Так как $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha=0$, то $\omega_j^\alpha+\gamma_{ij}\,\omega_\alpha^i=0$, где $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$. При смещении точки $x$ вдоль поверхности $V_p$ имеем: $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha .$$



Дифференцируя равенство $\vec{x}=x^\alpha\vec{e}_\alpha$, используя формулы (1), получим: $d\vec{x}=dx^\alpha\vec{e}_\alpha+x^\alpha(\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta)$, или $\omega^i=x^\alpha\omega_\alpha^i$, $dx^\alpha+x^\beta\omega_\beta^\alpha=0$.
С учетом этих формул равенство $\sum\limits_\alpha(x^\alpha)^2=r^2$ при дифференцировании удовлетворяется тождественно. Из равенств $\omega_j^\alpha+\gamma_{ij}\,\omega_\alpha^i=0$ и $\omega^i=x^\alpha\omega_\alpha^i$ следует, что

$$\sum_\alpha x^\alpha\omega_j^\alpha+\gamma_{ij}\,(x^\alpha\omega_\alpha^i)=0, \text{ т.е.}$$

$$\sum_\alpha x^\alpha b_{ij}^\alpha+\gamma_{ij}=0 . \qquad (2)$$

Пусть $V_p$ является р-сопряженной системой. Направим векторы $\vec{e}_i$ по касательным в точке $x$ к линиям сопряженной сети. Тогда $b_{ij}^\alpha=0$ $(i\neq j)$. По формулам (2) $\gamma_{ij}=0$ $(i\neq j)$. Итак, р-сопряженная система $V_p$ на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$ является ортогональной р-сопряженной системой. Так как $\gamma_{ij}=0$ $(i\neq j)$, то $\omega_i^j+\omega_j^i=0$ $(i\neq j)$. Положим $\gamma_{ii}=1$, тогда $\omega_i^i=0$.

2. Найдем произвол существования ортогональных Р-сопряженных систем, лежащих на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$, при этом будем предполагать, что поверхность $V_p$ лежит в своем соприкасающемся пространстве размерности $p+q=n$. Известно [1], что р-сопряженная система должна удовлетворять условиям:

$$
\begin{aligned}
\omega_i^\alpha &= b_{ii}^\alpha\,\omega^i, && \text{(нет суммирования)}\\
\omega_i^j &= a_{ii}^j\,\omega^i+a_{ij}^j\,\omega^j && (i\neq j).
\end{aligned}
$$

Учитывая, что р-сопряженная система лежит на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$, получим систему уравнений:

$$\omega^\alpha=0;\ \ \omega^i=x^\alpha\omega_\alpha^i;\ \ dx^\alpha+x^\beta\omega_\beta^\alpha=0;\ \sum_\alpha(x^\alpha)^2=r^2;\ dr=0,$$
$$\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0;\ \ \omega_i^\alpha+\omega_\alpha^i=0;\ \ \omega_i^j+\omega_j^i=0,$$

$$
\begin{aligned}
\omega_i^\alpha &= b_{ii}^\alpha\,\omega^i, && \text{(нет суммирования)}\\
\omega_i^j &= a_{ii}^j\,\omega^i+a_{ij}^j\,\omega^j. && (i\neq j)
\end{aligned}
$$

При внешнем дифференцировании этой системы получим систему квадратичных уравнений:

$$(*)\begin{cases} \Delta b^{\alpha}_{ii}\wedge\omega^i=0 & \text{(нет суммирования)}\\ \Delta a^j_{ii}\wedge\omega^i+\Delta a^j_{ij}\wedge\omega^j=0, & (i\neq j),\end{cases}$$

где формы $\Delta b^{\alpha}_{ii}$, $\Delta a^j_{ii}$, $\Delta a^j_{ij}$ представляют дифференциалы $db^{\alpha}_{ii}$, $da^j_{ii}$, $da^j_{ij}$ соответственно. Учитывая равенства $\omega^j_i+\omega^i_j=0$ $(i\neq j)$, т.е. $a^j_{ik}+a^i_{jk}=0$ $(i\neq j)$, можно доказать, что

$$\begin{aligned}\Delta a^j_{ii}+\Delta a^i_{ji}&=0,\\ \Delta a^j_{ij}+\Delta a^i_{jj}&=0.\end{aligned}\qquad (i\neq j)$$

Следовательно, система $(*)$ примет вид:

$$\begin{cases}\Delta b^{\alpha}_{ii}\wedge\omega^i=0, & \text{(нет суммирования)}\\ \Delta a^j_{ii}\wedge\omega^i+\Delta a^j_{ij}\wedge\omega^j=0. & (i<j).\end{cases}$$

По теореме Картана получаем, что исходная система в инволюции и определяет ортогональную р-сопряженную систему на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$ с произволом $\frac{p(p-1)}{2}$ функций двух аргументов.

3.Пусть векторы $\vec{e}_a$ $(a,b=p+1,\dots,p+q)$ образуют базис главной нормали $N_q(x)$ [2]. Вектор $\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\vec{e}_a$ — вектор средней кривизны поверхности $V_p$ в точке $x$. Учитывая, что $V_p$ — р-сопряженная система $(b^a_{ij}=0\ (i\neq j))$, получим: $\vec{M}=\frac{1}{p}(\vec{b}_{11}+\dots+\vec{b}_{pp})$, где $\vec{b}_{ii}=b^a_{ii}\vec{e}_a$. По формуле (2) для р-сопряженной системы на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$

$$\sum_a x^a b^a_{ii}+1=0\quad (b^{\sigma}_{ij}=0,\ \sigma=p+q+1,\dots,n).$$

Сложив эти $p$ равенств ($i=1,\dots,p$) и разделив полученный результат на $p$, получим:

$$\sum_a x^a\frac{1}{p}(b^a_{11}+\dots+b^a_{pp})+1=0,\ \text{т.е.}$$

$$\vec{M}\cdot\vec{0x}=-1.\qquad (3)$$

Отсюда следует

Т е о р е м а 1. Р-сопряженная система $V_p$ на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$, как поверхность в $E_n$, не может быть минимальной $(\vec{M}\neq\vec{0})$. Если в каждой точке $x$ р-сопряженной системы $V_p\subset S_{n-1}(0,r)\subset E_n$ имеем $\vec{0x}\parallel\vec{M}$, то по формуле (3): $|\vec{M}|\cdot|\vec{0x}|=1$. Следовательно, $|\vec{M}|=\frac{1}{r}$.



Итак, справедлива

Т е о р е м а 2. Если р-сопряженная система лежит на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$, то $\vec{M}\parallel\vec{0x}$ тогда и только тогда, когда конец вектора $\vec{M}$, отложенного от точки $x$, и точка $0$ — центр гиперсферы $S_{n-1}(0,r)$ инверсны относительно единичной сферы с центром в точке $x$. В этом случае поверхность $V_p$ имеет постоянную среднюю кривизну $|\vec{M}|=\frac{1}{r}$.

4.Найдем присоединенную поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ [2] р-сопряженной системы на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$. Пусть $\vec{y}=\vec{x}+y^a\vec{e}_a$, тогда

$$d\vec{y}=(\omega^i+y^a\omega^i_a)\vec{e}_i+(dy^b+y^a\omega^b_a)\vec{e}_b+y^a\omega^{\sigma}_a\vec{e}_{\sigma},$$

$$d\vec{y}\in N_q(x)\Leftrightarrow\omega^i+y^a\omega^i_a=0,\ \text{или}\ \omega^i-\sum_a y^a\omega^a_i=0.$$

Следовательно, $\omega^i(1-\sum_a y^a b^a_{ii})=0$.

Так как все $\omega^i$ одновременно не обращаются в нуль, то

$$\det\|1-\sum_a y^a b^a_{ii}\|=0.$$

Таким образом, присоединенная поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ в точке $x$ распадается на $p$ гиперплоскостей $\tilde{V}^i_{q-1}\subset N_q(x)$:

$$\sum_a y^a b^a_{ii}-1=0\qquad (i=1,\dots,p).$$

В этом случае, когда плоскость главной нормали $N_q(x)$ р-сопряженной системы $V_p$ на гиперсфере $S_{n-1}(0,r)\subset E_n$ проходит через центр $0$ гиперсферы, можно доказать, что все гиперплоскости $\tilde{V}^i_{q-1}$ пересекаются в точке $0$.

## Список литературы


1.С м и р н о в Р.В.Преобразование Лапласа р-сопряженных система.-ДАН СССР, 1951, 71, № 3, с.437-439.

2.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, № 4, с.475-492.